МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ

ФГОУ ВПО «БРЯНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

Кафедра высшей математики и физики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для студентов по специальности
110401 «Зоотехния» и 111201 «Ветеринария»

Брянск 2010

УДК 519.2
ББК 22.171
Б 95

Составители: Бычкова Т.В., Холодкова Л.Н.

Высшая математика: методические указания по самостоятельному выполнению практических заданий / Брянская ГСХА. Брянск. - 2010. - 50 с.

Предназначены для студентов 1 курсов основной и ускоренной подготовки. Методические указания содержат подробно решенные задачи, призванные помочь успешнее усваивать материал студентами при самостоятельной работе по теории вероятности и математической статистики.

Рецензент: профессор кафедры высшей математики и физики, кандидат технических наук Яковенко Н.И.

Рекомендовано учебно-методической комиссией факультета энергетики и природопользования от 19 февраля 2010 года протокол № 27.

1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются различные соединения (комбинации) элементов различных множеств.

Перестановками из n элементов называются такие соединения этих элементов, которые отличаются только порядком их следования друг за другом. Количество P_n всех возможных перестановок из n элементов находится по формуле

$$P_n = n! \qquad (1)$$

Размещениями из n элементов по k местам называются соединения, содержащие k элементов, взятых из n элементов и отличающихся друг от друга хотя бы одним элементом или их порядком. Количество A_n^k всех размещения из n элементов по k местам находится по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (2)$$

Сочетаниями из n элементов по k местам называются такие соединения, содержащие k элементов, взятых из n элементов и отличающихся друг от друга хотя бы одним элементом, порядок роли не играет. Количество C_n^k всех возможных сочетаний из n элементов по k местам, находятся по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (3)$$

Выражение $n!$ называется эн-факториал, и определяется оно так:

$$
\begin{aligned}
&0!=1,\\
&1!=1,\\
&2!=1\cdot 2=2,\\
&3!=1\cdot 2\cdot 3=6,\\
&4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24,\\
&5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120,\\
&\ldots\\
&n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n
\end{aligned}
$$

Перестановки из n элементов

Задача № 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, при условии, что цифры в числах не повторяются?

Решение. Искомое число трехзначных чисел $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$. И вот эти числа: 123, 132, 231, 213, 312, 321.

Ответ: 6 чисел.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача № 2. Сколькими способами можно составить список из 10-ти человек?

Задача № 3. Сколько существует способов, чтобы рассадить 12 гостей за круглый стол?

Задача № 4. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «Москва»?

Размещения из n элементов по k местам

Задача № 5. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{4!\cdot 5 \cdot 6}{4!} = 30.$$

Ответ: 30 сигналов.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача № 6. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9 (цифры в числах не повторяются)?

Задача № 7. Сколько четырёхзначных чисел можно записать при помощи цифр 1,2,3,4,5, при условии, что цифры в числах не повторяются?

Задача № 8. Сколькими способами можно распределить три награды (1,2,3 места) среди 10-ти участников соревнования?

Задача № 9. В классе 12 учебных предметов и 5 различных уроков в день. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий?

Задача № 10. В президиум собрания избраны 8 человек. Сколькими способами они могут распределить между собой обязанности председателя, секретаря и заместителя?

Задача № 11. Сколько существует способов, чтобы рассадить двух учеников по трём свободным местам?

Сочетания из n элементов по k местам

Задача № 12. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение. Искомое число способов для извлечения двух деталей из имеющихся десяти равно $C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = 45$.

Ответ: 45 способов.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача № 13. В группе 28 студентов. Сколько можно составить групп по 5 человек в каждой?

Задача № 14. Игра спортлото «5» из «36». Сколько неповторяющихся вариантов можно получить?

Задача № 15. В вазе 4 красных и 8 розовых гвоздик. Сколькими способами можно взять: а) три цветка из вазы? б) три красных и два розовых цветка?

Задача № 16. Сколькими способами можно рассадить 12 человек за три стола по 4 человека?

Задача № 17. Сколько различных вариантов существует для составления хоккейной команды из 9 нападающих, 5 защитников, 3 вратарей, если в состав хоккейной команды на предстоящую игру должны войти 3 нападающих, 2 защитника и 1 вратарь?

Задача № 18. В группе из 28 студентов 7 юношей. Требуется составить такие группы из 5 студентов, чтобы в каждой был юноша. Сколько таких групп можно составить?

Задача № 19. В школьном турнире по хоккею в полуфинал вышли 4 команды. Сколько всего игр состоится при условии, что каждая команда играет по две игры с противником?

2. Классическое определение вероятности

Случайным событием (или просто событием) A называется явление, которое может произойти или не произойти при осуществлении опыта (испытания). Например, испытание – подбрасывание монеты, событие A – выпадение орла; испытание – посадка в землю семени, событие A – прорастание семени; испытание – инфицирование животное, событие A – гибель животного и т.д.

Событие A называется достоверным, если оно в данном опыте обязательно должно произойти. Например, выпадение не более шести очков при бросании игральной кости. Другой пример достоверного события: камень, брошенный вверх рукой, вернется на Землю и не станет её искусственным спутником.

Событие A называется невозможным, если оно в данном опыте произойти не может. Например, событие – из яйца вылупится котёнок, является невозможным.

Классическое определение вероятности появления события A в данном испытании:

$$p(A)=\frac{m}{n} \qquad (4)$$

Здесь n - число всех возможных исходов испытания, а m - число благоприятствующих событию A исходов.

Все n возможных исходов испытания должны быть равновозможными.

Очевидно, что $0 \le p(A) \le 1$ для любого случайного события A. Если событие A невозможно, то $p(A) = 0$, а если оно достоверно, то $p(A) = 1$.

<u>Задача № 20.</u> Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется:

а) случайно названное двузначное число (угадывают с первого раза);

б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны?

<u>Решение.</u>

а) Событие A: случайно названное двузначное число окажется задуманным.

Число всех возможных исходов испытания – это общее количество двузначных чисел: $n = 99 - 9 = 90$ (1,2,3,4,…9,10,11,…99). Число благоприятствующих событию А исходов – это количество задуманных двузначных чисел: $m = 1$. Тогда по классическому определению вероятности $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{90} \approx 0{,}011$.

б) Событие B: случайно названное число, цифры которого различны, окажется задуманным.

Число всех возможных исходов испытания – это общее количество двузначных чисел, цифры которых различны: $n = 90 - 9 = 81$ (исключаются числа 11, 22, 33,…,99). Число благоприятствующих событию B исходов – это количество задуманных двузначных чисел: $m = 1$. Тогда по классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{81} \approx 0{,}012 \cdot$$

Ответ: $а)\ \frac{1}{90},\quad б)\ \frac{1}{81}.$

Задача № 21. В коробке шоколадных конфет «Ассорти» 5 конфет с ореховой, 8 со сливочной и 7 с шоколадной начинкой. Наугад вынимают три конфеты. Какова вероятность того, что:
а) все они с одинаковой начинкой;
б) все с разными начинками;
в) среди них 2 с ореховой и одна со сливочной начинкой?

Решение.

а) Событие A: три конфеты взятых из коробки с одинаковой начинкой.

Число всех возможных вариантов – это количество способов взять три конфеты из 20 (всего конфет: 5 + 7 + 8 = 20): $n = C_{20}^{3} = \frac{20!}{3!\cdot(20-3)!} = \frac{20!}{3!\cdot 17!} = \frac{18\cdot 19\cdot 20}{6} = 1140.$

Число благоприятствующих событию A исходов – это количество вариантов, чтобы взять или 3 с ореховой, или 3 со сливочной, или 3 с шоколадной начинкой. Выбирать три конфеты с ореховой начинкой из 5 можно C_5^3 способами; 3 конфеты со сливочной начинкой из 8 можно C_8^3 способами; 3 конфеты с шоколадной начинкой из 7 можно C_7^3 способами. Тогда $m = C_5^3 + C_8^3 + C_7^3$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10,\ C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{6} = 56,$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{6} = 35,\ m = 10 + 56 + 35 = 101.$$

Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{101}{1140} \approx 0{,}089.$

б) Событие B: три конфеты взятых из коробки с разными начинками.

Число благоприятствующих событию B исходов - это количество вариантов, чтобы взять 1 конфету с ореховой и 1 со сливочной и 1 с шоколадной начинкой. Тогда по правилу умножения $m = C_5^1 \cdot C_8^1 \cdot C_7^1 = 5 \cdot 8 \cdot 7 = 280$. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{280}{1140} \approx 0{,}246.$$

в) Событие C: из трёх конфет взятых из коробки 2 с ореховой и одна со сливочной начинкой.

Число благоприятствующих событию C исходов – это количество вариантов, чтобы взять 2 с ореховой и 1 со сливочной начинкой. Выбирать две конфеты с ореховой начинкой из 5 можно C_5^2 способами; 1 конфету со сливочной начинкой из 8 можно C_8^1 способами. Тогда $m = C_5^2 \cdot$

$$C_8^1 = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot 8 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3!} \cdot 8 = 10 \cdot 8 = 80.$$

Тогда $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{80}{1140} \approx 0{,}070.$

Ответ: а) 0,089; б) 0,246; в) 0,07.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача № 22. Брошены две игральные кости. Найти вероятность следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна семи;

б) сумма выпавших очков равна восьми, а разность – четырём.

Задача № 23. В группе 28 студентов. Из них на экзамене четверо получили отлично, 10 – хорошо, 12 – удовлетворительно, 2 – неудовлетворительно. Определить вероятность того, что 1) произвольно выбранный студент получил удовлетворительную оценку; 2) произвольно выбранный студент получил оценку не ниже хорошей.

Задача № 24. Какова вероятность при игре в покер вытащить четыре туза (в колоде 52 карты).

Задача № 25. В коробке 5 занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекаются все кубики. Какова вероятность того, что номера появятся в порядке возрастания.

Задача № 26. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

Задача № 27. В бассейне 8 лещей и 12 карпов. Какова вероятность того, что из пяти выловленных рыб две окажутся лещами?

Задача № 28. Для определения всхожести семян взяли пробу из 1000 единиц. Из отобранных семян 125 не взошли. Какова вероятность того, что наудачу взятое семя не взойдёт?

3. Теоремы сложения и умножения.

Пусть A и B – любые два случайных события. Если в данном опыте появление одного события исключает появление другого, то такие события называются <u>несовместными</u>. Если же появление одного из событий не исключает появление другого, то такие события называются <u>совместными</u>. Например, событие A – студент получил оценку «хорошо» и событие B – студент получил оценку «отлично». События A и B являются несовместными, если говорить про один и тот же экзамен и про одного студента. События A и B называют <u>независимыми</u> друг от друга, если появление или не появление одного из них не изменяет вероятности появления другого. Несколько событий образуют <u>полную группу событий</u>, если: а) они попарно несовместны; б) в результате испытания появится хотя бы одно из них. Например, события A и B – выпадение орла и выпадение решки при подбрасывании одной монеты - образуют полную группу событий. Символом $\overline{A}$ обозначается событие <u>противоположное</u> событию A. Например, событие A – сделали сегодня прививку, ему противоположное $\overline{A}$ - не сделали сегодня прививку.

Суммой событий $\boldsymbol{A+B}$ называется событие C, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A **или** B.

Теорема сложения	
Если A, B – совместные события, то $\boldsymbol{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)}$ **(5)**	Если A, B – несовместные события, то $\boldsymbol{P(A+B)=P(A)+P(B)}$ **(6)**

Произведение событий $\boldsymbol{A \cdot B}$ называется событие C, которое состоящее в появлении событий A **и** B.

Теорема умножения	
Если A, B – зависимые события, то $\boldsymbol{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)}$ **(7)** где $P_A(B)$ – вероятность события B при условии, что A произошло.	Если A, B – независимые события, то $\boldsymbol{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)}$ **(8)**

Задача № 29. Вероятность первого охотника попасть в волка равна 0,7, а второго 0,8. Какова вероятность убить волка при одном залпе охотников?

Решение.

Пусть событие A – первый охотник убьет волка, событие B – второй охотник убьет волка, событие C – кто-то (первый или второй охотник) убьет волка.

Очевидно, что событие C состоит в том, что произойдёт хотя бы одного из событий A или B, т.е. $C=A+B$. Поскольку события A и B совместны, то

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94.$$

Ответ: 0,94.

Задача № 30. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

Решение.

Пусть событие A – первый билет окажется выигрышным, событие B – второй билет окажется выигрышным, событие C – оба билета выигрышные. Очевидно, что $C = A \cdot B$. События A и B – зависимые, по теореме умножения для зависимых событий, получаем:

$$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Вероятность того, чтобы первый билет был выигрышным $P(A) = 0{,}05$.

Если первый билет забрали, и он оказался выигрышным, тогда билетов осталось 99, а выигрышных 4, тогда вероятность для второго билета быть выигрышным, при условии, что первый билет выигрышный, равна $P_A(B) = \frac{4}{99} = 0{,}04$.

Таким образом, $P(C) = 0{,}05 \cdot 0{,}04 = 0{,}002$.

Ответ: 0,002.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача № 31. При подготовке к экзамену первый студент выучил 20 вопросов из 25, а второй 15 из 25. Найти вероятность того, что 1) оба студента знают ответ на заданный вопрос; 2) никто из них не знает ответ; 3) знает хотя бы один из них; 4) ответ знает только один из студентов.

Задача № 32. Из 35 вопросов студент знает ответ на 20 вопросов. Какова вероятность того, что он ответит на два, заданные подряд вопроса?

Задача № 33. У двух студентов есть три яблока, одно из которых червивое. Какова вероятность ни для кого из студентов не съесть червивое яблоко?

Задача № 34. Какова вероятность рождения у коровы детёнышей близнецов, если вероятность рождения двойни равна 0,0082, тройни – 0,0003, четырёх и более детенышей – 0,00002?

Задача № 35. В распоряжении агрохимика есть 8 различных видов минеральных удобрений. Ему необходимо провести несколько экспериментов по изучению совместного влияния любой тройки минеральных удобрений. Какова вероятность того, что в наудачу выбранной тройке удобрений одновременно окажутся удобрения A и B?

Задача № 36. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

Задача № 37. В июле 6 пасмурных дней. Найти вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода.

4. Формула полной вероятности и формула Байеса

1) Пусть событие A может произойти только вместе с одним из попарно несовместных событий $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$, образующих полную группу событий. Тогда вероятность события А находится по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B1}(A)+ P(B_2)\cdot P_{B2}(A)+\ldots+ P(B_n)\cdot P_{Bn}(A) \qquad (9)$$

2) Пусть событие A может произойти только вместе с одним из попарно несовместных событий $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$, образующих полную группу событий. Чтобы узнать, какое из этих событий наступило, если известно, что событие A произошло, применяется формула Байеса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)\cdot P_{Bi}(A)}{P(A)} \qquad \textbf{(10)}$$

где $i = 1,2,3,\ldots,n$,

$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B1}(A)+ P(B_2)\cdot P_{B2}(A)+\ldots+ P(B_n)\cdot P_{Bn}(A)$ – полная вероятность события A.

Задача № 38. В водоёме обитают особи рыб двух близких видов. Особи первого вида составляют 60% всей популяции, особи второго вида – 40%. На каждые 100 особей первого вида приходится в среднем 75 самцов, а на 100 особей второго – 65 самцов. Какова вероятность того, что первая рыба, выловленная из этого водоёма, окажется самцом?

Решение.

Пусть событие A - первая рыба, выловленная из этого водоёма, окажется самцом. Событие B_1 – выловленная рыба окажется особью первого вида, событие B_2 – выловленная рыба окажется особью второго вида. Событие A может произойти только вместе с одним из попарно несовместных событий B_1, B_2.

$$P(B_1) = 0,6;\ \ P(B_2) = 0,4;$$

$$P_{B1}(A) = 0,75;\ \ P_{B2}(A) = 0,65;$$

По формуле полной вероятности, получаем: $P(A) = 0,6 \cdot 0,75 + 0,4 \cdot 0,65 = 0,71$.

Ответ: 0,71.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача № 39. Имеются две одинаковые корзины с картофелем. В первой корзине находится 60% сорта «Синеглазка» и 40% сорта «Белорусская ранняя», во второй корзине – 45% картофеля «Синеглазка» и 55% сорта «Белорусская ранняя». Некто берёт наугад один клубень картофеля, он оказывается сорта «Синеглазка». Что вероятнее: клубень был из первой или из второй корзины?

Задача № 40. Предположим, что 5 % мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Считая, что мужчин и женщин одинаковое количество, найти вероятность того, что этот человек 1) мужчина, 2) женщина?

Задача № 41. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием К; 30% с заболеванием L; 20% с заболеванием M. Вероятность полного излечения от болезни К равна 0,7; болезни L -0,8; болезни M -0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием К.

Задача № 42. По результатам проверки контрольных работ оказалось, что в первой группе получили положительную оценку 20 студентов из 30, а во второй 15 из 25. Найти вероятность того, что наудачу выбранная работа, имеющая положительную оценку, написана студентом первой группы.

Задача № 43. В студенческой группе 70%- юноши. 20% юношей и 40% девушек имеют сотовый телефон. После занятий в аудитории был найден кем-то забытый телефон. Какова вероятность того, что он принадлежал 1) юноше, 2) девушке?

Задача № 44. Перед посевом 80% всех семян было обработано ядохимикатами. Вероятность поражения растений, проросших из этих семян, вредителями равна 0,06, а растений, проросших из необработанных семян – 0,3. Какова вероятность того, что взятое наудачу растение будет поражённым? Если оно поражено, то какова вероятность того, что оно выращено из обработанного семени?

5. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Теоремы Лапласа. Формула Пуассона.

1. Формула Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний событие A наступило ровно k раз, то вероятность появления события A ровно k раз можно найти по формуле:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \tag{11}$$

где p, q – вероятности появления и не появления события А в одном испытании

$p = P(A)$; $q = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p$; $(p + q = 1)$

2. При больших значениях n нужно пользоваться приближённой локальной формулой Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),\ x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \qquad (12)$$

значения функции вероятности $\varphi(x)$ находятся по таблице (см. Приложение 1), причём, эта функция является чётной; для $x < -5$, $x > 5$ $\varphi(x) \approx 0$.

3. Для нахождения вероятности того, что событие при n независимых испытаний наступило от k_1 до k_2 раз, нужно пользоваться интегральной формулой Лапласа:

$$\boldsymbol{P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)}, \qquad (13)$$

где $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, значения функции Лапласа $\Phi(x)$ находятся по таблице (см. Приложение 2), причём эта функция является нечётной, и для $x > 5$ $\Phi(x) = 0{,}5$.

4. Формула Пуассона. Если число испытаний велико, а вероятность появления события в каждом испытании очень мала ($np<10$), то пользуются формулой:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (14)$$

где $\lambda = np$, $e = 2{,}7182\ldots$

Задача № 45. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу пяти деталей две стандартные, если вероятность того, что каждая деталь окажется стандартной, равна 0,9.

Решение.

Вероятность события A, состоящего в том, что взятая наудачу деталь стандартна, есть $p = 0{,}9$, а вероятность того, что она нестандартна, есть $q = 1 - p = 0{,}1$. Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}0081.$$

Ответ: 0,0081.

Задача № 46. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех?

Решение.

Пусть событие В – из 4 семян взойдут 3 семени; событие С – из 4 семян взойдет 4 семени. По теореме сложения вероятностей $P(A) = P(B) + P(C)$.

Вероятности Р(В) и Р(С) определим по формуле Бернулли.

Тогда $P(B) = P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}2916;$

$$P(C) = P_4(4) = C_4^4 p^4 q^{4-4} = 0{,}9^4 = 0{,}6561.$$

Искомая вероятность $P(A) = 0{,}2916 + 0{,}6561 = 0{,}9477$.

Ответ: 0,9477.

Задача № 47. Среди семян пшеницы 0,02% сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 10 000 семян будет обнаружено 6 семян сорняков?

Решение.

По условию задачи *p = 0,0002; n = 10000; k = 6*. Поскольку число *n* испытаний велико, а вероятность *p* появления события в каждом испытании очень мала ($\lambda = np = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2 < 10$), то пользуемся формулой Пуассона

$$P_{10000}(6) \approx \frac{2^6}{6!} \cdot e^{-2} = \frac{64}{720} \cdot 0{,}1353 = 0{,}012.$$

Ответ: 0,012.

Задача № 48. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле $p = 0{,}4$. Найти вероятность того, что при 600 выстрелах мишень будет поражена 250 раз.

Решение.

По условию, $n = 600$, $k = 250$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$.

Вычислим значение x:

$$x = \frac{250 - 600 \cdot 0{,}4}{\sqrt{600 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} = \frac{10}{12} \approx 0{,}833.$$

По таблице значений функции $\varphi(x)$ находим $\varphi(0{,}833) = 0{,}2820$.

Тогда искомая вероятность по формуле (12) равна

$$P_{600}(250) = \frac{1}{\sqrt{600 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} \cdot 0,2820 = 0,0235.$$

Ответ: 0,0235.

Задачи для самостоятельного решения:

<u>Задача № 49.</u> Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырёх или три партии из шести (ничьи во внимание не берутся)?

<u>Задача № 50.</u> Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней 3 дня окажутся дождливыми?

<u>Задача № 51.</u> Для прядения смешаны поровну белый и окрашенный хлопок. Какова вероятность того, что среди пяти случайно выбранных волокон смеси обнаружится менее двух окрашенных?

<u>Задача № 52.</u> Всхожесть семян данного сорта растений оценивается с вероятностью, равной 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее четырёх?

<u>Задача № 53.</u> Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 100. Берётся на пробу 2 дм^3 воздуха. Найти

вероятность того, что в нём будет обнаружен хотя бы один микроб.

Задача № 54. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 790 и 830.

Задача № 55. Из шести яиц в среднем получается 5 живых цыплят. Какова вероятность того, что из 10 яиц получится от 6 до 8 живых цыплят?

Задача № 56. В некотором водоеме карпы составляют 90%. Найти вероятность того, что в улове из 100 рыб карпов окажется 96.

Задача № 57. Производится сортировка плодов некоторого растения. Известно, что данное растение дает в среднем 80% крупных плодов. Найти вероятность того, что из 400 плодов будет отобрано 330 крупных.

Задача № 58. Среди семян пшеницы 0,02% сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 10 000 семян будет обнаружено 6 семян сорняков?

Задача № 59. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: 1) ровно 2; 2) менее двух; 3) более двух (принять e^{-3}=0,04979).

6. Случайные величины

Случайной величиной называется переменная величина, которая в результате опыта может принимать то или иное числовое значение.

Дискретной случайной величиной называется такая величина, число возможных значений которой можно занумеровать.

Непрерывной случайной величиной называется такая величина, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый интервал числовой оси (конечный или бесконечный).

Задача № 60. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	40	42	41	44
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Найти: 1) математическое ожидание M(X); 2) дисперсию D(X); 3) среднее квадратическое отклонение σ.

Решение.

1) Если закон распределения дискретной случайной величины задан таблицей, где в первой строке даны значения случайной величины X, а во второй – вероятности этих значений, то математическое ожидание M(X) вычисляется по формуле:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \ .$$

Тогда для нашего случая M(X) = $40 \cdot 0{,}1 + 42 \cdot 0{,}3 + 41 \cdot 0{,}2 + 44 \cdot 0{,}4 = 42{,}4$.

2) Дисперсией D(X) дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания, т.е.

$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[x_i - M(X)\right]^2 \cdot p_i$. Эта величина характеризует среднее ожидаемое значение квадрата отклонения X от M(X). Из последней формулы имеем:

$$D(X) = (40-42{,}4)^2 \cdot 0{,}1 + (42-42{,}4)^2 \cdot 0{,}3 + (41-42{,}4)^2 \cdot 0{,}2 + (44-42{,}4)^2 \cdot 0{,}4 =$$

$$= 2{,}4^2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}3 + 1{,}4^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 2{,}04.$$

Дисперсию D(X) можно найти другим способом, исходя из следующего её свойства: дисперсия D(X) равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом математического ожидания M(X), то есть $D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2$.

Для вычисления $M(X^2)$ оставим следующий закон распределения величины X^2:

X^2	40^2	42^2	41^2	44^2
P	0,1	0,3	0,2	0,4.

Тогда

$$M\left(X^2\right)=40^2\cdot 0{,}1+42^2\cdot 0{,}3+41^2\cdot 0{,}2+44^2\cdot 0{,}4=160+529{,}2+336{,}2+774{,}4=1799{,}8$$

и дисперсия $D(X)==1799{,}8-42{,}4^2=2{,}04$.

3) Для характеристики рассеяния возможных значений случайной величины вокруг её среднего значения вводится среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X, равное квадратному корню из дисперсии D(X), то есть $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Исходя из этой формулы имеем: $\sigma=\sqrt{2{,}04}\cong 1{,}43$.

Ответ: 1) 42,4; 2) 2,04; 3) 1,43.

Задачи для самостоятельного решения:

В <u>задачах 61-70</u> задан закон распределения дискретной случайной величины X.

Найти: 1) математическое ожидание M(X); 2) дисперсию D(X); 3) среднее квадратическое отклонение σ.

61.

X	8	4	6	5
p	0,1	0,3	0,2	0,4

62.

X	23	25	27	29
p	0,2	0,1	0,3	0,4

63.	X	10	8	6	9
	p	0,4	0,1	0,3	0,2

64.	X	32	40	37	35
	p	0,1	0,3	0,4	0,2

65.	X	42	41	43	45
	p	0,3	0,3	0,2	0,2
66.	X	15	11	13	12
	p	0,2	0,5	0,2	0,1

67.	X	52	54	57	51
	p	0,1	0,4	0,3	0,2

68.	X	21	20	22	26
	p	0,5	0,2	0,2	0,1

69.	X	34	30	32	36
	p	0,2	0,4	0,3	0,1

70.	X	50	48	51	53
	p	0,3	0,2	0,2	0,3

7. Равномерное и нормальное распределение

Равномерным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, если на интервале (a, b), которому принадлежат все возможные значения величины X, плотность сохраняет постоянное значение:

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \quad (15);$$

Вне этого интервала *f(x)=0*. Числовые характеристики равномерного распределения:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}, \quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}} \quad (16).$$

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty \prec x \prec \infty)\,(17),$$

где числовые характеристики нормального распределения имеют вид:

$$M(X)=a, \quad D(X)=\sigma^2, \quad \sigma(X)=\sigma \quad (18).$$

Правило трёх сигм: для нормального распределения все значения случайной величины отстоят от её математического ожидания не более чем, на три её средних квадратических отклонения: (a - 3σ; a + 3σ).

Задача № 71. Для коров некоторой породы удой за лактацию некоторая случайная величина, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием a = 3200 кг и средним квадратическим отклонением σ = 300 кг.

Найти:

1) Процент животных, удои которых за лактацию заключены в пределах от 3000 кг до 3500 кг?

2) В каком диапазоне наблюдаются удои?

<u>Решение:</u>

1) Воспользуемся формулой для вычисления вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}) \cdot$$

По условию задачи a = 3200, σ = 300, α = 3000, β = 3500. Тогда

$$P(3000 < X < 3500) = \Phi(\frac{3500 - 3200}{300}) - \Phi(\frac{3000 - 3200}{300}) = \Phi(1) - \Phi(-0,66) =$$
$$= 0,3413 + 0,2454 = 0,5867 \approx 0,59$$

2) По правилу «трёх сигм» находим:

$$a - 3\sigma = 3200 – 900 = 2300,$$

$$a + 3\sigma = 3200 + 900 = 4100.$$

Тогда для коров данной породы удои за лактацию будут колебаться от 2300 кг до 4100 кг.

Ответ: 1) 0,59; 2) от 2300 кг до 4100 кг.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача № 72. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на промежутке [-2,6]. Построить график плотности распределения $y=f(x)$ величины X. Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, дисперсию, коэффициент вариации величины X.

Задача № 73. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a=10. Вероятность попадания X в интервал (10; 20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал (0; 10)?

Задача № 74. Масса яблока, средняя величина которой равна 150 г, является нормально распределённой случайной величиной со средним квадратическим отклонением 20 г. Найти вероятность того, что масса наугад взятого яблока будет заключена в пределах от 130 г до 180 г.

Задача № 75. Средний вес зерна равен 0,2г. Среднее квадратическое отклонение равно 0,05г. Определить вероятность того, что вес наудачу взятого зерна окажется в пределах от 0,16 г до 0,22 г.

Задача № 76. Норма высева семян на 1 га равна 200 кг. Фактический расход семян на 1 га колеблется около этого значения со средним квадратическим отклонением 10 кг. Определить количество семян, обеспечивающих посев на площади 100 га с гарантией 0,95.

8. Элементы математической статистики. Простейшие приёмы обработки выборочных данных

и оценка параметров распределения.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Выборочной совокупностью (выборкой) называют совокупность случайно отобранных объектов. Объём выборки, общее число наблюдений n. Наблюдаемые значения x_i называют вариантами, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, - вариационным рядом. Числа наблюдений называют частотами, а относительной частотой: $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною Δx_i, а высоты равны плотности относительной частоты $P_i = \dfrac{\omega_i}{\Delta x_i}$.

Доверительным считается интервал $(\bar{x}-\delta; \bar{x}+\delta)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надёжностью γ, где точность δ интервальной оценки $\bar{x}$ связана с её надёжностью γ соотношением: $\delta = t_\gamma \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}$, s –среднее выборочное квадратическое отклонение. По специальной таблице критических точек распределения Стьюдента находится значение t_γ, зная n и γ (Приложение 3).

Задача № 77. Из крупного стада коров произведена случайная выборка, получено 20 вариантов удоя коров за 300 дней лактации (в ц.): 35,9; 35,3; 42,7; 45,2; 25,9; 35,3; 33,4; 37,0; 35,9; 38,8; 33,7; 38,6; 40,9; 35,5; 44,1; 37,4; 34,2; 30,8; 38,4; 31,3.

Требуется:

1) Получить вариационный ряд и построить гистограмму относительных частот;

2) Найти основные выборочные характеристики: выборочную среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации;

3) С надёжностью 95% указать доверительный интервал для оценки генеральной средней.

Решение:

1) Запишем исходные данные в виде вариационного ряда, т.е. располагая их в порядке возрастания: 25,9; 27,0; 30,8; 31,3; 33,4; 33,7; 34,2; 35,3; 35,3; 35,5; 35,9; 35,9; 37,4; 38,4; 38,6; 38,8; 40,9; 42,7; 44,1; 46,2.

Максимальное значение признака x_{max}= 46,2 ц, а минимальное x_{min} = 25,9 ц.

Размах вариации составляет $\Delta = x_{max} - x_{min} = 46{,}2 - 25{,}9 = 20{,}3$ ц.

Разобьем полученный интервал на 5-6 классов, поскольку объём выборки достаточно мал (20-40 вариант). Возьмём длину классового интервала равную $\Delta x_i = 5$. Получаем пять интервалов: первый 25-30, второй 30-35, третий 35-40, четвёртый 40-45, пятый 45-50 (начало первого класса необязательно должно совпадать со значением минимальной варианты). Теперь в каждом интервале произведём подсчёт частот, т.е. подсчёт количества вариант, попадающих в каждый из интервалов. Результаты подсчётов лучше оформить в виде таблицы (см. таблица 1). Произведём подсчёт относительных частот по формуле $\omega_i = \frac{m_i}{n} = \frac{m_i}{20}$:

$$\omega_1 = \frac{2}{20} = 0{,}1; \quad \omega_2 = \frac{5}{20} = 0{,}25; \quad \omega_3 = \frac{9}{20} = 0{,}45; \quad \omega_4 = \frac{3}{20} = 0{,}15; \quad \omega_5 = \frac{1}{20} = 0{,}01$$

Для проверки найдём сумму относительных частот:

$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 = 0,1 + 0,25 + 0,45 + 0,15 + 0,01 = 1.$

Получив единицу, мы подтвердили правильность вычислений.

Вычислим плотность относительных частот вариант по формуле:

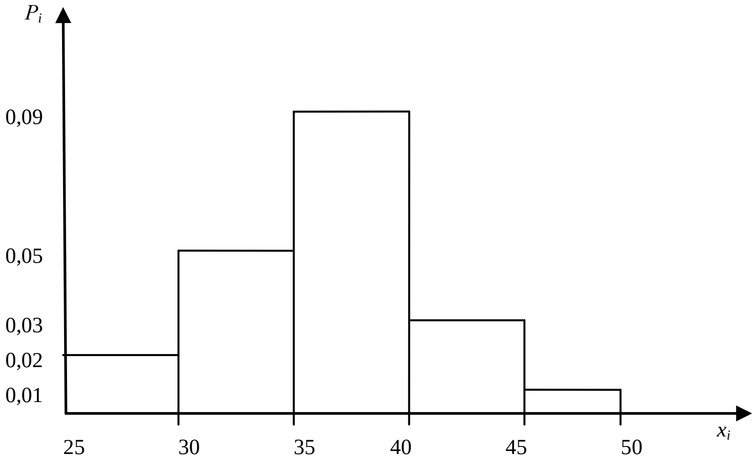
$$P_i = \frac{\omega_i}{\Delta x_i} = \frac{\omega_i}{5}:$$

$$P_1 = \frac{0,1}{5} = 0,02; \quad P_2 = \frac{0,25}{5} = 0,05; \quad P_3 = \frac{0,45}{5} = 0,09; \quad P_4 = \frac{0,15}{5} = 0,03; \quad P_5 = \frac{0,05}{5} = 0,01$$

Таблица 1

№	Интервалы	Частоты m_i	Относительные частоты $\omega_i = \frac{m_i}{20}$	Плотность относительных частот $P_i = \frac{\omega_i}{5}$
1	25-30	2	0,1	0,02
2	30-35	5	0,25	0,05
3	35-40	9	0,45	0,09
4	40-45	3	0,15	0,03
5	45-50	1	0,05	0,01
Контроль		Сумма 20	Сумма 1	

Построим гистограмму относительных частот, на оси абсцисс изображаем классовые интервалы, а значения плотностей относительных частот откладываем по оси ординат:



2) Подсчёт основных выборочных характеристик осуществляется по формулам: Выборочная средняя $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ (19);

Дисперсия (исправленная выборочная)

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \bar{x}\right)^2}{n-1} \quad (20);$$

Среднее квадратическое отклонение $s = \sqrt{s^2}$ (21);

Коэффициент вариации $V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$ (22).

Расчёты удобно производить с помощью таблицы (см. таблица 2).

Таблица 2

№	x_i	$x_i - \overline{x} = x_i - 36{,}0$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \left(x_i - 36{,}0\right)^2$
1	35,9	-0,1	0,01
2	35,3	-0,7	0,49
3	42,7	6,7	44,89
4	45,2	9,2	84,64
5	25,9	-10,1	102,01
6	35,3	-0,7	0,40
7	33,4	-2,6	6,76
8	27,0	-9,0	81,00
9	35,9	-0,1	0,01
10	38,8	2,8	7,84
11	33,7	-2,3	5,29
12	38,6	2,6	6,76
13	40,9	4,9	24,01
14	35,5	-0,5	0,25
15	44,1	8,1	65,61
16	37,4	1,4	1,89
17	34,2	-1,8	3,24
18	30,8	-5,2	37,04
19	38,4	2,4	5,76
20	31,3	-4,7	22,09
Сумма	$\sum_{i=1}^{n} x_i = 720{,}3$	0	$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 = 490{,}05$

Напомним, что в нашем случае число наблюдений (объём выборки) $n = 20$. Просуммировав варианты x_i, найдём выборочную среднюю:

$\bar{x} = \frac{1}{20} \cdot 720{,}3 = 36{,}015 \approx 36{,}0$. Зная значение выборочной дисперсии, вычислим третий и четвертый столбцы таблицы 2. Для контроля: сумма значений в третьем столбце должна равняться нулю.

$$s^2 = \frac{1}{20-1} \cdot 490{,}05 = 25{,}79$$

$$s = \sqrt{25{,}79} = 5{,}08$$

$$V = \frac{5{,}08}{36} \cdot 100\% = 14\%$$

Поскольку 10%<V<20%, то изменчивость удоев за 300 дней следует считать средней.

3) Доверительный интервал для оценки генеральной средней определяется так:

$(\bar{x}-\delta; \bar{x}+\delta)$, где $\delta = t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$, s –среднее выборочное квадратическое отклонение. По специальной таблице критических точек распределения Стьюдента находится значение t_γ, зная что $n=20$ и $\gamma = 0{,}95$.

$$t_\gamma = t(\gamma, n) = t(0{,}95;\ 20) = 2{,}10$$

Тогда $\delta = 2{,}10 \cdot \frac{5{,}08}{\sqrt{20}} = 2{,}10 \cdot 1{,}34 \approx 2{,}8$, $(\bar{x}-\delta; \bar{x}+\delta)$ = (36,0-2,8; 36,0+2,8) = (33,2; 38,8).

Таким образом, с надёжностью 95% можно утверждать, что во всём стаде средний удой за 300 дней (генеральная средняя) заключён в пределах от 33,2 ц (гарантированный минимум) до 38,8 ц (возможный максимум).

Задачи для самостоятельного решения:

В задачах 78-87 заданы результаты обследований.
Требуется:

1. Получить вариационный ряд и построить гистограмму относительных частот;
2. Найти основные выборочные характеристики: выборочную среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации;
3. С надёжностью 95% указать доверительный интервал для оценки генеральной средней.

Обследовано по весу (кг) 20 кроликов. Результаты обследований представлены в таблице 3.

Таблица 3

№ набл.	№ задачи				
	78	**79**	**80**	**81**	**82**
1.	3,1	5,5	3,2	6,0	4,8
2.	4,2	5,9	3,8	4,5	5,4
3.	5,0	7,5	4,1	4,7	4,9
4.	4,6	5,4	4,3	5,7	3,8
5.	6,4	3,4	4,3	5,2	5,5
6.	5,3	5,2	5,6	3,8	5,2
7.	3,8	4,3	6,0	4,3	6,4
8.	5,1	4,7	5,7	4,3	6,7
9.	4,9	5,8	4,5	5,1	5,8
10.	5,4	6,8	5,0	5,7	5,4
11.	5,9	4,0	6,7	6,3	4,7
12.	6,5	5,7	5,3	4,8	3,3
13.	5,5	4,5	5,4	5,6	5,1
14.	5,7	5,3	4,7	6,4	4,6
15.	4,7	6,3	4,3	7,2	5,8
16.	5,6	5,2	5,9	5,0	6,0
17.	5,8	4,1	6,5	5,3	7,1
18.	7,3	5,1	7,1	5,1	5,2
19.	4,7	5,0	3,4	4,2	5,5
20.	5,5	6,2	4,6	3,7	4,7

Обследованы высоты 20 сосен (в метрах) в 25-летнем возрасте. Результаты обследований представлены в таблице 4.

Таблица 4

№ набл.	№ задачи				
	83	**84**	**85**	**86**	**87**
1.	6,3	9,5	9,7	8,9	5,8
2.	9,9	11,7	9,2	9,9	7,1
3.	5	9,7	12,3	11,8	8,8
4.	11,5	12,4	6,2	11	6,8
5.	11,4	10,2	10,1	8,7	8,9
6.	11,9	10,7	12,5	11,5	8,1
7.	12	11,3	10,8	10,1	12
8.	12,1	11,9	10	8,5	12,1
9.	6,2	10	11,1	9	8,1
10.	7,8	8,1	12,6	10,9	11
11.	9,2	11,1	12	10	10,9
12.	9,1	11,2	6,3	8,2	7,1
13.	10,2	10,8	10,3	10,4	7,5
14.	10,9	8,6	10,2	11,6	8,7
15.	10,6	11,2	6,9	11,9	12,6
16.	7,8	11,7	8,4	9,2	8,1
17.	9,3	11,1	9,2	7,9	9,5
18.	10,4	8,9	10,3	11,8	7,9
19.	9,5	9,4	9,6	9,4	9,9
20.	9,7	10,1	10,2	9,4	10,3

9. Корреляция и регрессия

Статистической называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечёт изменение распределения другой. Корреляционной называют такую статистическую зависимость, при которой изменение одной из величин изменяет среднее значение другой. Например, с изменением температуры изменяется среднее количество сельскохозяйственных вредителей.

Задача № 88. Для петушков леггорнов 15-дневного возраста были получены следующие данные о весе их тела X (г) и весе гребня У(мг):

x_i	83	72	69	90	90	95	95	91	75	70
y_i	56	42	18	84	56	107	90	68	31	48

Требуется:

1) Найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи между признаками;
2) Составить уравнение прямой регрессии;
3) Нанести на чертёж исходные данные и построить полученную прямую регрессии.

Решение:

1) В случае малых выборок, коэффициент корреляции вычисляется так: $r = \dfrac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_i - \bar{y})^2}}$ (23). Расчёты удобно производить с помощью таблицы (см. таблица 5).

Таблица 5

№	x_i	y_i	$x_i - \overline{x} =$ $= x_i - 83$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2 =$ $= \left(x_i - 83\right)^2$	$y_i - \overline{y} =$ $= y_i - 60$	$\left(y_i - \overline{y}\right)^2 =$ $= \left(y_i - 60\right)^2$	$\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)$
1	83	56	0	0	-4	16	0
2	72	42	-11	121	-18	324	198
3	69	18	-14	186	-42	1764	588
4	90	84	7	49	24	576	168
5	90	56	7	49	-4	16	-28
6	95	107	12	144	47	2209	564
7	95	90	12	144	30	900	360
8	91	68	8	64	8	64	64
9	75	31	-8	64	-29	841	232
10	70	48	-13	169	-12	144	156
Сумма	830	600	0	990	0	6854	2302

Вычисляем выборочные средние значения $\overline{x}$, $\overline{y}$, пользуясь формулами (19) и суммами данными второго и третьего столбца таблицы 3:
$\overline{x} = \dfrac{830}{10} = 83,\quad \overline{y} = \dfrac{600}{10} = 60.$ Для контроля: сумма значений в четвёртом и шестом столбцах должна равняться нулю. Заполнив таблицу, суммируя элементы,

находим:
$$\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = 990$$
$$\sum\left(y_i - \overline{y}\right)^2 = 6854$$
$$\sum\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right) = 2302$$

Подставляя значения в формулу (23), находим: $r = \dfrac{2302}{\sqrt{990 \cdot 6854}} = 0{,}88.$ Вывод: между весом тела X и весом гребня У у петушков леггорнов существует тесная положительная линейная корреляционная связь, поскольку величина коэффициента линейной корреляции ближе к 1, чем к 0.

2) Уравнение прямой регрессии имеет вид:

$$y - \bar{y} = b_{y/x}\left(x - \bar{x}\right), \text{ где } b_{y/x} = \frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \quad (24).$$

Используя данные из таблицы 3, подставляя их в (24), получаем искомое уравнение прямой регрессии:

$$y - 60 = \frac{2302}{990} \cdot \left(x - 83\right)$$

$$y - 60 = 2{,}32\left(x - 83\right)$$

$$y = 2{,}32x - 2{,}32 \cdot 83 + 60$$

$$y = 2{,}32x - 132{,}56$$

3) Нанесём исходные данные на координатную плоскость и построим найденную прямую регрессии (рис.1).

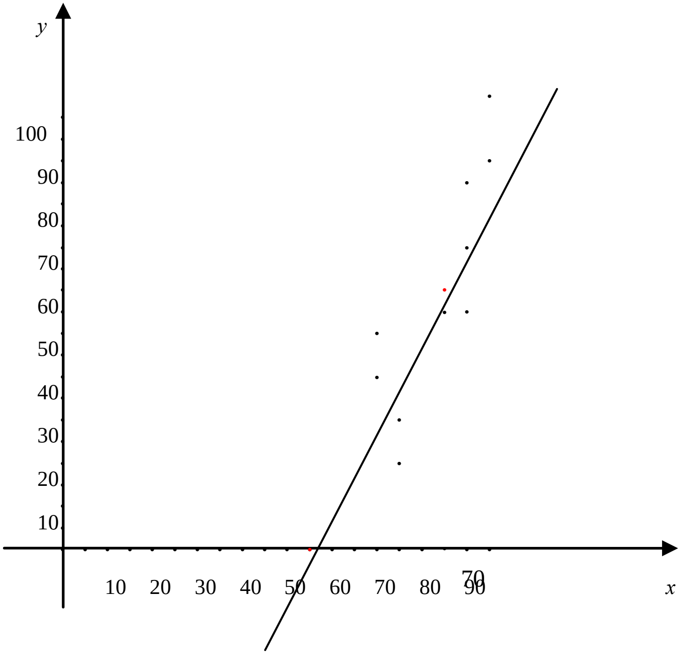


Рисунок 1.

Для того, чтобы провести прямую в системе координат достаточно иметь две точки, одна из них с координатами (83; 60), вторую найдём подставив в уравнение регрессии значение y=0, получим (57; 0).

Полученное уравнение прямой регрессии прогнозирует с достаточной степенью точности лишь при изменении переменной x от 69 до 95. Тогда при весе петушка 80 г вес его гребня составит: $y = 2{,}32 \cdot 80 - 132{,}56 \approx 53$ мг.

Задачи для самостоятельного решения:

В задачах 89 - 98 заданы результаты обследований.

Требуется:

1) Найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи между признаками;
2) Составить уравнение прямой регрессии;
3) Нанести на чертёж исходные данные и построить полученную прямую регрессии.

В таблице 6 представлены данные о длине туши Х (см) и толще шпика У (см) для свиней различных пород.

Таблица 6

№ набл.	№ задачи									
	89		**90**		**91**		**92**		**93**	
	Х	У	Х	У	Х	У	Х	У	Х	У
1.	97	35	93	36	104	31	95	36	102	32
2.	104	31	101	31	98	35	90	37	95	37
3.	103	32	95	34	100	32	103	32	97	35
4.	98	34	97	35	102	31	104	31	98	34
5.	101	30	102	30	99	32	89	37	94	37
6.	102	33	94	35	97	33	97	35	90	38
7.	100	31	96	36	95	36	101	34	100	30
8.	99	34	100	31	101	32	96	34	101	31
9.	96	35	95	36	103	30	99	33	93	36
10.	98	32	92	37	98	35	102	32	96	35

В таблице 7 представлены измерения у 10 телят по глубине груди Х (см) и живой массе У (кг).

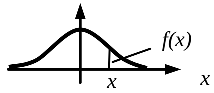
Таблица 7

№ набл.	№ задачи									
	94		**95**		**96**		**97**		**98**	
	Х	У	Х	У	Х	У	Х	У	Х	У
1.	91	62	82	51	103	79	85	56	97	61
2.	86	43	101	59	96	61	94	63	89	48
3.	94	60	105	78	93	59	92	60	95	59
4.	95	73	96	63	100	68	104	70	106	75
5.	104	87	98	73	89	55	101	64	98	62
6.	92	65	112	68	97	70	98	59	92	67
7.	98	79	106	65	98	66	93	61	85	60
8.	84	52	93	62	87	54	87	49	94	72
9.	96	65	110	70	106	75	99	58	103	78
10.	99	68	91	62	97	61	95	65	97	58

ПРИЛОЖЕНИЕ
(таблицы)

Приложение 1

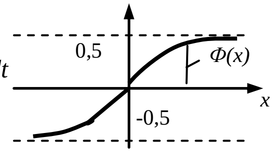
Значения функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0026
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002-	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Значения функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

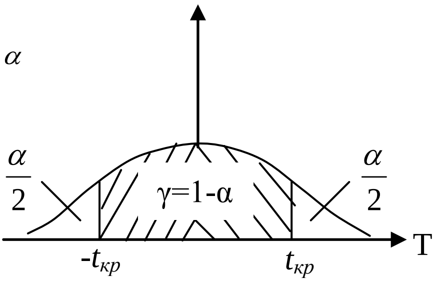


x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,39	0,1517	0,78	0,2823	1,17	0,3790	1,56	0,4406	1,95	0,4744
0,01	0,0040	0,40	0,1554	0,79	0,2852	1,18	0,3810	1,57	0,4418	1,96	0,4750
0,02	0,0080	0,41	0,1591	0,80	0,2881	1.19	0,3830	1,58	0,4429	1,97	0,4756
0,03	0,0120	0,42	0,1628	0,81	0.2910	1,20	0,3849	1,59	0.4441	1,98	0,4761
0,04	0,0160	0,43	0,1664	0,82	0,2939	1,21	0,3869	1,60	0,4452	1,99	0,4767
0,05	0,0199	0,44	0,1700	0,83	0,2967	1,22	0,3883	1,61	0,4463	2,00	0,4772
0,06	0,0239	0,45	0,1736	0,84	0,2995	1,23	0,3907	1.62	0,4474	2,02	0,4783
0,07	0,0279	0,46	0,1772	0,85	0,3023	1,24	0,3925	1,63	0,4484	2,04	0,4793
0,08	0,0319	0,47	0,1808	0,86	0,3051	1,25	0,3944	1,64	0.4495	2,06	0,4803
0,09	0,0359	0,48	0,1844	0,87	0,3078	1,26	0,3962	1,65	0,4505	2,08	0,4812
0,10	0,0398	0,49	0,1879	0,88	0,3106	1,27	0,3980	1,66	0,4515	2,10	0,4821
0,11	0,0438	0,50	0,1915	0,89	0,3133	1,28	0,3997	1,67	0,4525	2,12	0,4830
0,12	0,0478	0,51	0,1950	0,90	0,3159	1,29	0,4015	1,68	0,4535	2,14	0.4838
0,13	0,0517	0,52	0,1985	0,91	0,3186	1,30	0,4032	1,69	0,4545	2,16	0,4846
0,14	0,0557	0,53	0,2019	0,92	0,3212	1,31	0,4049	1,70	0,4554	2.18	0,4854
0,15	0,0596	0,54	0,2054	0,93	0,3238	1,32	0,4066	1,71	0,4564	2.20	0,4861
0,16	0,0636	0,55	0,2088	0,94	0,3264	1,33	0,4082	1,72	0,4573	2,22	0,4868
0,17	0,0675	0,56	0,2123	0,95	0,3289	1,34	0,4099	1,73	0,4582	2,24	0,4875
0,18	0,0714	0,57	0,2157	0,96	0,3315	1,35	0,4115	1,74	0,4591	2,26	0,4881
0,19	0,0753	0,58	0,2190	0,97	0,3340	1,36	0,4131	1,75	0,4599	2,28	0,4887
0,20	0,0793	0,59	0,2224	0,98	0,3365	1,37	0.4147	1,76	0,4608	2,30	0,4893
0,21	0,0832	0,60	0,2257	0.99	0,3389	1,38	0,4162	1,77	0,4616	2,32	0,4898
0,22	0,0871	0,61	0,2291	1,00	0,3413	1,39	0,4177	1,78	0,4625	2,34	0,4904
0,23	0,0910	0,62	0,2324	1,01	0,3438	1,40	0,4192	1,79	0,4633	2,36	0,4909
0,24	0,0948	0,63	0,2357	1,02	0,3461	1.41	0,4207	1,80	0,4641	2,38	0,4913
0,25	0,0987	0,64	0,2389	1,03	0,3485	1.42	0,4222	1,81	0,4649	2,40	0,4918
0,26	0,1026	0,65	0,2422	1,04	0.3508	1,43	0,4236	1,82	0,4656	2,42	0,4922
0,27	0,1064	0,66	0,2454	1,05	0,3531	1,44	0,4251	1,83	0,4664	2.44	0,4927
0,28	0,1103	0,67	0,2486	1,06	0,3554	1,45	0,4265	1,84	0,4671	2,46	0,4931
0,29	0,1141	0,68	0,2517	1,07	0,3577	1,46	0,4279	1,85	0.4678	2,48	0,4934
0,30	0,1179	0,69	0,2549	1,08	0,3599	1,47	0,4292	1,86	0,4686	2,50	0,4938
0,31	0,1217	0,70	0,2580	1,09	0,3621	1,48	0,4306	1,87	0,4693	2,60	0,4953
0,32	0,1255	0,71	0,2611	1,10	0,3643	1,49	0,4319	1,88	0,4699	2,70	0,4965
0,33	0,1293	0,72	0,2642	1.11	0,3665	1,50	0,4332	1,89	0,4706	2,80	0,4974
0,34	0,1331	0,73	0,2673	1,12	0,3686	1,51	0,4345	1,90	0,4713	2,90	0,4981
0.35	0,1368	0,74	0,2703	1,13	0,3708	1,52	0,4357	1,91	0,4719	3,00	0,4986
0.36	0,1406	0,75	0,2734	1.14	0,3729	1,53	0,4370	1,92	0,4726	3,50	0,4997
0,37	0,1443	0,76	0.2764	1.15	0,3749	1,54	0.4382	1,93	0,4732	4,00	0,4999
0,38	0,1480	0,77	0,2794	1,16	0,3770	1,55	0,4394	1,94	0,4738	5,00	0,5

Приложение 3

Критические точки $t_{кр} = t_{кр}(\alpha; k)$ распределения Стьюдента
(Т - распределения) с k степенями свободы, удовлетворяющие условию

$$p(-t_{кр} < T < t_{кр}) = \gamma = 1 - \alpha$$



k	γ (α)			k	γ (α)		
	0,90 (0,10)	0,95 (0,05)	0,99 (0,01)		0,90 (0,10)	0,95 (0,05)	0,99 (0,01)
1	6,31	12,71	63,66	9	1,83	2,26	3,25
2	2,92	4,30	9,92	10	1,81	2,23	3,17
3	2,35	3,18	5,84	15	1,75	2,13	2,95
4	2,13	2,78	4,60	20	1,72	2,09	2,85
5	2,02	2,57	4,03	30	1,70	2,04	2,75
6	1,94	2,45	3,71	60	1,67	2,00	2,66
7	1,89	2,36	3,50	120	1,66	1,98	2,62
8	1,86	2,31	3,36	∞	1,64	1,96	2,58

Литература:

1. Агапов А.Г. Задачник по теории вероятностей: Учеб. пособие для студентов втузов.- М.: Высш. шк., 1986.- 80 с.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов - М.: Высш. шк., 2003.- 405 с.

3. Комогорцев В.Ф. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике для студентов экономических специальностей. Брянск. Изд-во ФГОУ ВПО «Брянская ГСХА». 2007 -179 с.

4. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / под ред. С.Н. Федина. - М.: Айрис-пресс, 2004.-592с.

5. Высшая математика: Программа, методические указания по изучению дисциплины и контрольные задания / Всесоюзный с.-х. ин-т заоч. образования: сост. В.Г.Раскин, С.О.Стрыгина, С.Н.Дементьев. М., 1991. 48 с.

Оглавление

Учебное издание

Бычкова Татьяна Викторовна
Холодкова Людмила Николаевна

Теория вероятностей и элементы математической статистики

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 01.03.2010 г. Формат 60х84. 1/16.
Бумага офсетная. Усл.п.л. 2,90. Тираж 100 экз. Изд.№ 1595.

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии
243365, Брянская обл., Выгоничский район,
с. Кокино, Брянская ГСХА